

Ниже приведена 11 глава книги:

Майер Р.В. Математические начала современной теории механического движения: Учебное пособие. — Глазов: ГГПИ, 2007. — 164 с.

11. ОСНОВЫ НЕРЕГУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ



11.1. РЕГУЛЯРНЫЙ И ХАОТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ. БИФУРКАЦИЯ. С точки зрения классической механики мир детерминирован: зная скорости и координаты всех частиц можно абсолютно точно рассчитать их значения в последующие моменты времени и предсказать эволюцию системы (механистический детерминизм). На самом деле это невозможно даже для совокупности взаимодействующих между собой молекул газа. Если начальные координаты и скорости частиц известны с небольшой погрешностью, то после каждого столкновения неопределенность возрастает. Как бы ни была высока точность измерения начальных координат и импульсов, можно указать интервал времени, по прошествии которого состояние системы будет полностью неопределенным.

Существует несколько причин, каждая из которых по отдельности препятствует точному предсказанию состояния системы: 1) невозможно абсолютно точно установить состояние системы, так как измерения координат и импульсов частиц осуществляются с погрешностью; 2) невозможно построить абсолютно точную модель взаимодействия частиц друг с другом и внешними телами; 3) невозможно абсолютно точно рассчитать движение частиц, так как используемые методы численного интегрирования и дифференцирования являются приближенными; 4) определенную погрешность вносит компьютер за счет конечного количества разрядов, используемых для отображения действительных чисел.

Представим себе мощный суперкомпьютер, рассчитывающий движение всей Вселенной, кроме самого себя. В этом случае невозможно предсказать состояние этого компьютера, которое неизбежно повлияет на состояние Вселенной. Поэтому абсолютно точное предсказание будущего невозможно.

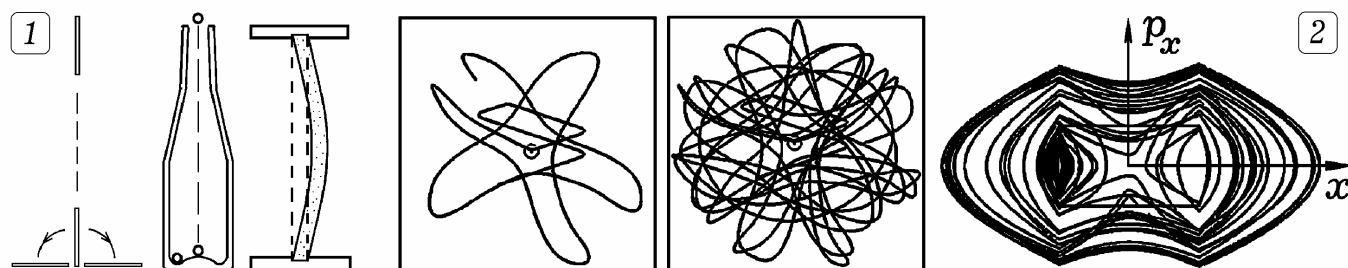


Рис.11.1

Часто задача имеют устойчивое решение: бесконечно малые изменения начального состояния системы приводят к тому, что ее состояние в последующие моменты времени также изменяются на бесконечно малые величины того же порядка малости. Например, вариации начальной скорости спутника Земли на 0,1% приводит к тому, что его координата и скорость в момент t' изменяются на сравнимую величину. В то же время возможны ситуации, в которых система ведет себя неустойчиво.

Рассмотрим некоторые системы, ведущие себя непредсказуемым образом: 1. Падение монеты на горизонтальную поверхность: монета вроде бы должна несколько раз подпрыгнуть на ребре и остановиться в вертикальном положении. На самом деле реализуется одно из двух устойчивых решений, которому соответствует минимальное значение потенциальной энергии: монета упадет на орла или решку (рис. 11.1.1.). 2. Падение шарика на дно абсолютно симметричной бутылки с выпуклым дном. Симметричному начальному состоянию соответствует симметричное решение: должен прыгать вдоль вертикали и остановиться в точке А. Решение неустойчиво, поэтому система выбирает один из бесконечно большого числа путей, соответствующий переходу в состояние с минимальной потенциальной энергией: шарик скатывается в сторону (рис. 11.1.1.). 3. Потеря устойчивости стержня при действии продольной нагрузки. Симметричное решение, при котором стержень сжимается, соответствует максимальному значению потенциальной энергии и потому неустойчиво. Стержень искривляется в ту или иную сторону, выбирая состояние с минимальной потенциальной энергией (рис. 11.1.1.).

Подобные явления демонстрируют спонтанное (самопроизвольное) нарушение симметрии. Оно заключается в том, что физическая система, которая описывается уравнениями, обладающими симметрией, переходит в несимметричное состояние. Это происходит в случае, когда симметричное состояние не обладает минимальной энергией и поэтому не является энергетически выгодным, а состояние с минимальной энергией имеет много решений, каждое из которых не обладает симметрией.

Примером простой двумерной механической системы, способной совершать хаотическое движение, является *бильярд Синная*. Он в общем случае представляет собой горизонтально расположенный ящик с изогнутыми стенками и одним или несколькими стержнями в середине. Внутри бильярда движется шарик, который упруго ударяется со стенками и стержнем и отскакивает от них. Небольшие изменения начальных условий приводит к тому, что траектория движения шарика сильно изменяется. На рис. 11.1.2 представлен результат компьютерного моделирования движения шарика в случае, когда стенками являются наклонные плоскости, а в центре бильярда находится конический выступ. Тут же представлена проекция фазовой кривой на плоскость, образованную осями x , p_x .

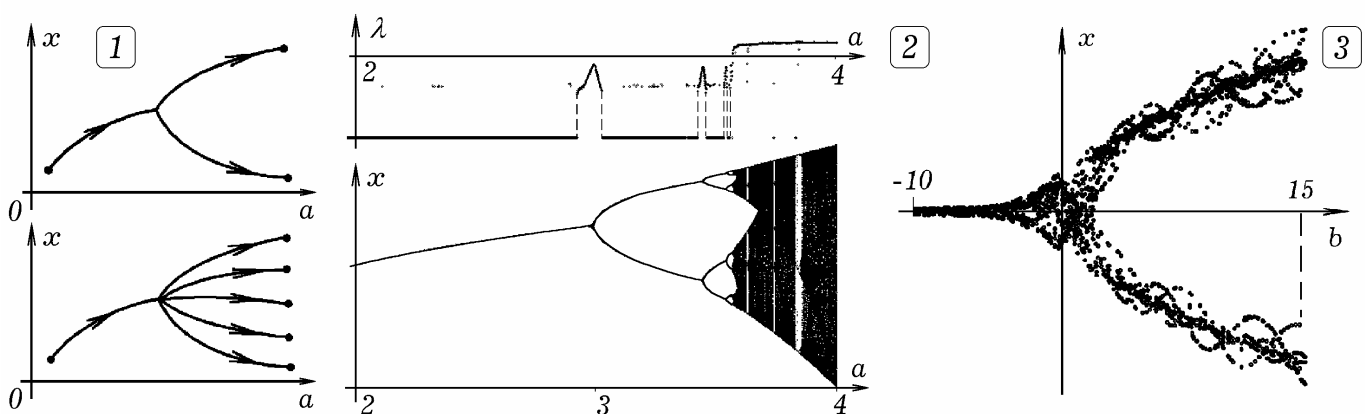


Рис.11.2

Бифуркация (bifurcus - раздвоенный) — качественное изменение характера движения динамической системы в результате малого изменения ее параметров, после прохождения которого система может эволюционировать по двум различным путям. Значения параметров, при которых происходят подобные изменения называются *критическими* или *бифуркационными*. В случае, когда система эволюционирует по трем и более путям говорят о *полибифуркации* (рис. 11.2.1).

11.2. ЛОГИСТИЧЕСКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ. ПОКАЗАТЕЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ ЛЯПУНОВА. Допустим процесс описывается логистическим отображением $x_{i+1} = ax_i(1 - x_i)$. Будем монотонно увеличивать параметр a в интервале от 0 до 4 и вычислять значения x_i . При этом обнаружим, что сначала (от 0 до 3) x_i при $i \rightarrow \infty$ стремится к некоторому определенному значению (рис. 11.2.2). При $a \approx 3$ происходит первая бифуркация, в результате чего получается два возможных значения x_i , образуется характерная вилка. При дальнейшем росте a возникает следующая бифуркация, затем еще и еще. В результате последовательности бифуркаций система переходит в хаотический режим, которому соответствует фрактальное множество точек в правой части графика (рис. 11.2.2). На рис. 11.2.3 показана аналогичная бифуркация типа вил, возникающая при изменении бифуркационного параметра в случае колебаний маятника Дафинга, который рассмотрен ниже.

Главное свойство систем с хаотическим поведением — чувствительность к начальным условиям: небольшие изменения начальных условий (координат скоростей) приводят к тому что система эволюционирует по другой фазовой кривой. Неустойчивость поведения системы можно охарактеризовать показателем устойчивости Ляпунова. Пусть движение системы описывается отображением $x_{n+1} = f(x_n)$, при котором соседние траектории в фазовом пространстве разбегаются и наступает хаос. Рассмотрим две одинаковых системы, находящихся в различных начальных состояниях, которым соответствуют соседние точки x_0 и $x_0 + \varepsilon$, отличающиеся друг от друга на малую величину ε (рис. 11.3.1.). После N итераций системы будут находиться в точках $f^N(x_0)$ и $f^N(x_0 + \varepsilon)$, удаленных друг от друга на расстояние $\varepsilon e^{N\lambda(x_0)}$, где $\lambda(x_0)$ — показатель Ляпунова, характеризующий степень экспоненциального разбегания фазовых траекторий и зависящий от x_0 . Получаем:

$$\varepsilon e^{N\lambda(x_0)} = |f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|.$$

В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)}{\varepsilon} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|.$$

где $e^\lambda(x_0)$ — коэффициент растяжения, показывающий во сколько раз в среднем увеличивается расстояние между очень близкими точками за одну итерацию. На рис. 11.2.2 построена зависимость показателя Ляпунова λ от бифуркационного параметра a для логистического отображения. Видно, что вблизи бифуркации и в хаотическом режиме величина λ увеличивается.

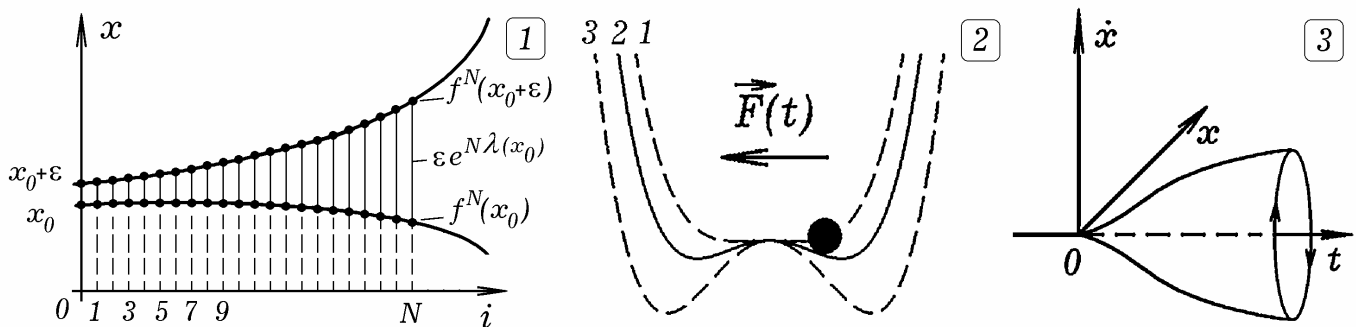


Рис.11.3

11.3. МАЯТНИК ДАФИНГА. Рассмотрим колебания шарика внутри потенциальной ямы с двумя углублениями под действием внешней периодически изменяющейся силы $F(t) = F_m \cos(\omega t)$. Пусть потенциальная энергия внутри ямы задается функцией $U(x) = 0,25x^4 - 0,5x^2$ (рис. 11.3.2). Потенциальное поле создает

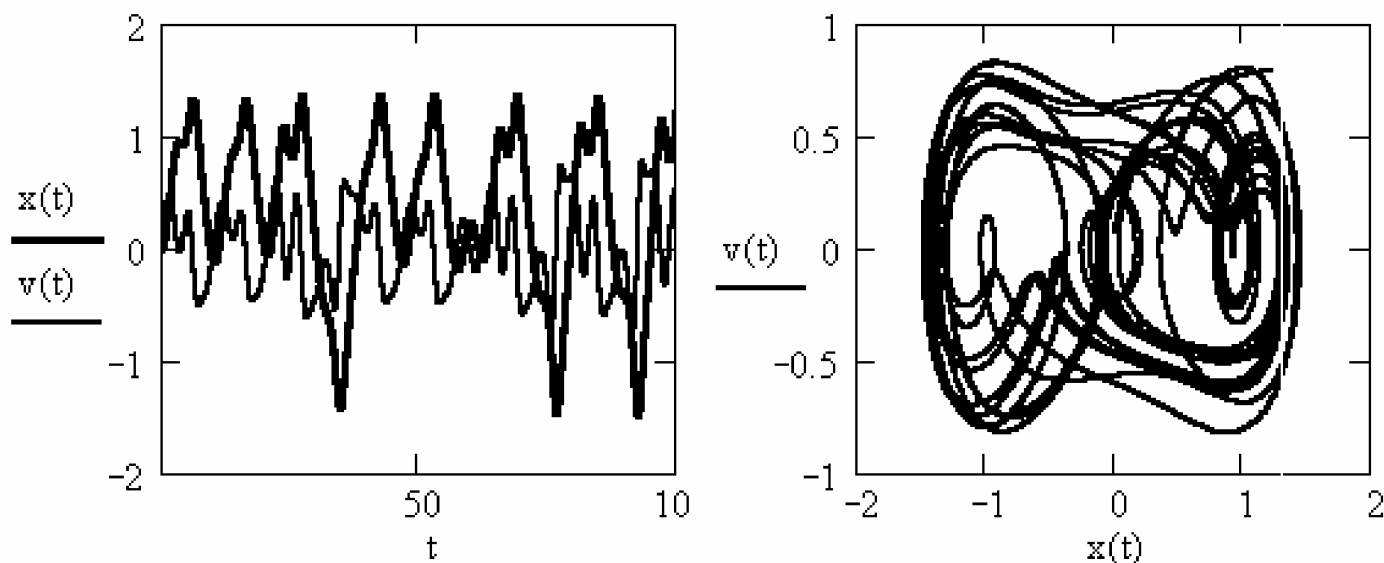
возвращающую силу $F = -\partial U/\partial x = -x^3 + x$. Из второго закона Ньютона получаем дифференциальное уравнение колебаний Даффинга: $m\ddot{x} + r\dot{x} + (x^3 - x) = F_m \cos \omega t$. Вариант решения представлен на рис.11.4. Из графиков $x(t)$ и $v(t)$ и фазовой кривой видно, что система совершает нерегулярные стохастические колебания относительно двух положений равновесия. Движение шарика является трудно предсказуемым, бесконечно малые изменения параметров системы, начальных условий и внешней силы приводит к тому, что система эволюционирует по иному пути.

Given

Рис.11.4

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 0.4 \frac{d}{dt}x(t) + x(t)^3 - x(t) = 0.5 \cdot \cos(1.2 \cdot t) \quad x'(0) = 0 \quad x(0) = 0$$

$$x := \text{odesolve}(t, 200, 400) \quad t := 0, 0.01 .. 300 \quad v(t) := \frac{d}{dt}x(t) \quad a(t) := \frac{d}{dt}v(t)$$



Исследуем поведение системы в случае плавного изменения профиля потенциальной ямы, при котором в ее центре растет бугорок и вместо одного углубления получаются два. На рис.11.3.2 изображен профиль потенциальной ямы $U(x) = 0,25x^4 - \alpha x^2$ при $\alpha_1 = 0,1$, $\alpha_2 = 0,5$, $\alpha_3 = 1$. Будем на экран компьютера выводить координаты x через некоторое время после начала колебаний, когда они стали установившимися, в зависимости от бифуркационного параметра α , определяющего профиль потенциальной ямы (рис. 11.3.2). По мере увеличения α вместо одной потенциальной ямы получается две, система начинает совершать колебания относительно двух положений равновесия. Получается бифуркация типа *вил* (рис. 11.2.3). Чтобы получить обе ветви необходимо рандомизировать фазу вынуждающей силы.

При движении системы с n степенями свободы точка в фазовом $2n$ -мерном пространстве выписывает сложную кривую. Рассмотрим сечение Пуанкаре — множество точек пересечения фазовой кривой с некоторой плоскостью α . Возможны следующие варианты: 1) периодическое движение: фазовая кривая последовательно проходит через конечное множество точек сечения: сначала через точку a , затем через b , через c , затем снова через точку a и т.д. (рис. 11.5.1); 2) квазипериодическое движение: фазовая кривая пересекает плоскость α в точках, образующих некоторую непрерывную линию, например окружность (рис. 11.5.2); 3) нерегулярное или хаотическое: множество точек на плоскости α расположено случайно и фрактальную структуру (рис. 11.5.3). В последнем случае траектория хаотически блуждает по фазовому пространству.

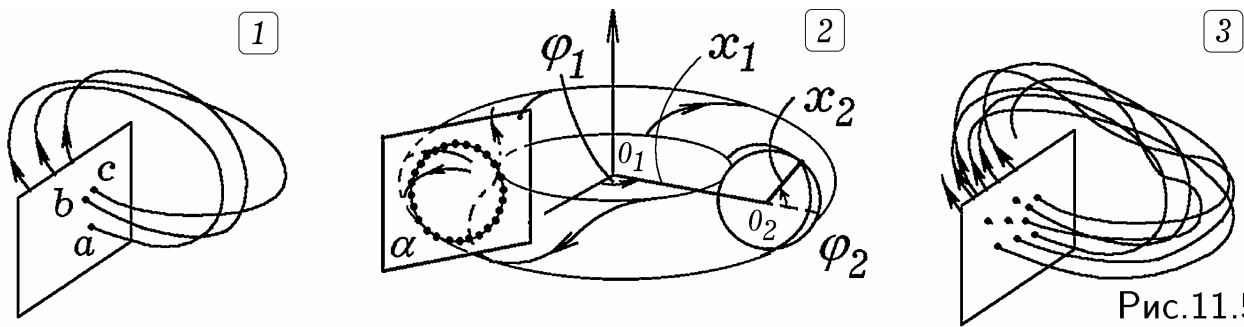


Рис.11.5

Рассмотрим колебания системы с двумя степенями свободы, например, движение двух несвязанных между собой маятников. Фазовое пространство для таких систем четырехмерно, их движение может быть наглядно представлено движением по окружности с центром O_1 , определяемым переменными x_1, φ_1 , и одновременно по окружности с центром O_2 , определяемым x_2, φ_2 . В результате фазовая кривая представляет собой обмотку тора. Если отношение частот ω_1/ω_2 рационально, то она замкнута, движение периодическое; если ω_1/ω_2 — иррациональная величина, то фазовая кривая незамкнута, движение квазипериодическое.

Сечения Пуанкаре (рис. 11.6) для маятника Даффинга получены так: на ЭВМ моделируются колебания системы и определяются ее состояния в моменты времени, когда фаза вынуждающей силы α равна $0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi$ (ПР-11, Приложение). Так как режим хаотический, точки сечения имеют фрактальную структуру.

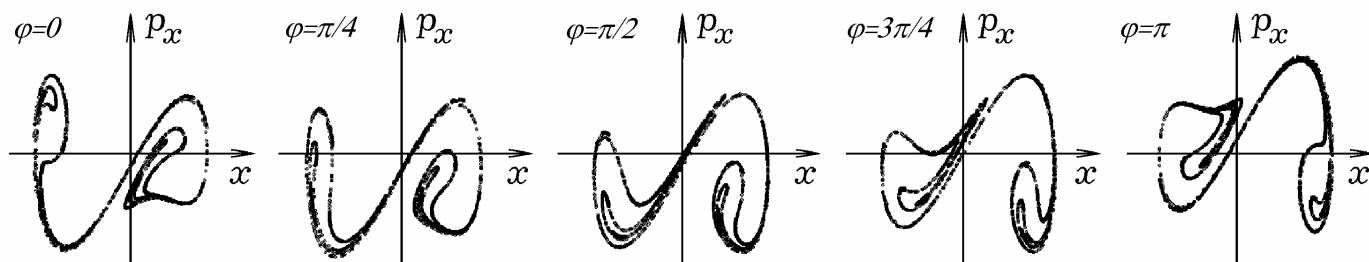


Рис.11.6

11.4. ВИДЫ БИФУРКАЦИЙ. ПЕРЕХОД В ХАОТИЧЕСКИЙ РЕЖИМ. Перечислим основные виды бифуркации:

1. Бифуркация состояний равновесия: изменение бифуркационного параметра приводит к исчезновению, либо к появлению новых состояний равновесия. Например, рождение из одного равновесного состояния трех: шарик движется в потенциальной яме, в центре растет симметричный бугорок, возникает три состояния равновесия (система Даффинга). Или рассмотренные выше бифуркации (падение монеты, деформация пластины в результате продольной нагрузки) или полибифуркации (падение шарика на выпуклое дно бутылки, изгиб цилиндрического стержня и т.д.) — это полибифуркации типа вилок, так как их диаграмма напоминает вилку (рис. 11.2.1). В результате в симметричной системе, возникают несимметричные решения.

2. Бифуркация рождения предельного цикла из состояния равновесия — переход системы из состояния равновесия в автоколебательный режим (рис. 11.3.3). При этом в фазовом пространстве возникает спираль: из устойчивого фокуса рождается предельный цикл. Характер возникновения автоколебаний: мягкий по амплитуде и жесткий по частоте (генератор Ван-дер-Поля, бифуркация Андронова-Хопфа).

3. Бифуркация смены устойчивости периодических движений, переход к хаосу через перемежаемость. Происходит исчезновение состояний равновесия и предельных циклов, возникают стохастические колебания. Например, на маятник Даффинга

действует периодическая сила, изменяющаяся по импульсному закону, частота которой ниже собственной частоты. В результате шарик перескакивает из одной потенциальной ямы в другую, графики $x(t)$, $v(t)$ и фазовая кривая представлены на рис. 11.7.

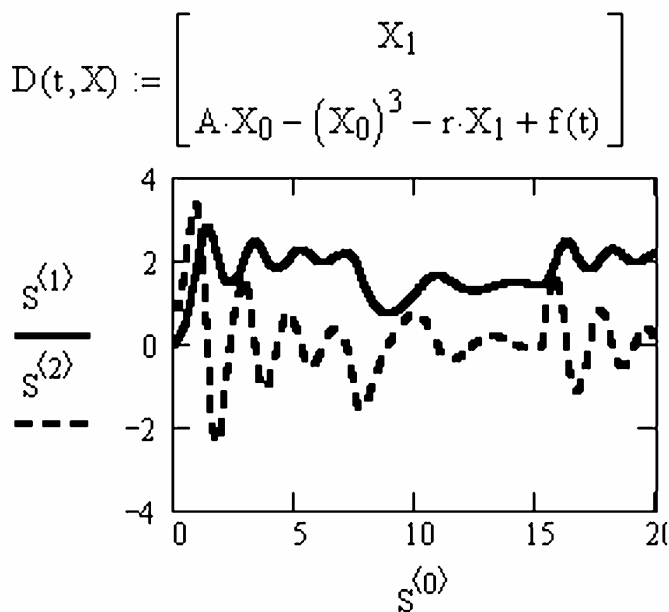
Рассмотрим некоторые сценарии перехода в хаотический режим:

1. Сценарий Фейгенбаума: при монотонном изменении бифуркационного параметра происходит последовательность бифуркаций удвоения периода. При этом исходный предельный цикл в фазовом пространстве теряет свою устойчивость и превращается в цикл удвоенного периода. Затем происходит новая бифуркация потери устойчивости и получается предельный цикл учетверенного периода и т.д. В результате система переходит от устойчивого регулярного периодического движения к хаотическому. Это приводит к появлению новых кратных гармоник в спектре периодически изменяющихся величин, спектр становится практически сплошным. Если через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$, обозначить критические значения бифуркационного параметра μ , то оказывается, что при $n \rightarrow \infty$ отношение $(\mu_n - \mu_{n-1})/(\mu_{n+1} - \mu_n)$ стремится к числу Фейгенбаума $\delta = 4,6692\dots$, которое не зависит от вида динамической системы. Значение параметра μ_n при $n \rightarrow \infty$ стремится к некоторому пределу μ_∞ : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu_\infty$. При превышении этого предела образуется странный аттрактор, спектр колебаний становится сплошным, наступает хаос. Примеры: логистическое отображение, аттрактор Реслера, ячейки Бенара.

2. Переход к хаосу через перемежаемость. Перемежаемость — такой вид зависимости $x(t)$, в которой длинные регулярные фазы случайно чередуются с короткими нерегулярными всплесками. Допустим имеется колебательная или автоколебательная система на которую периодически воздействуют с помощью коротких импульсов силы, выводя ее из состояния статического или динамического равновесия. В этом случае система совершает сложное движение, каждый раз возвращаясь в установившийся режим (рис. 11.7, 11.8). Такой переход к хаосу является непрерывным, так как нет критического значения бифуркационного параметра, после которого регулярное движение скачком превращается в хаотическое.

Известны также сценарий Рюэля–Тakensа, сценарий Помо–Манневиля и другие.

$$i := 0, 1..1000 \quad r := 0.8 \quad A := 2 \quad A0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f(t) := \begin{cases} 5 & \text{if } \sin(t \cdot 0.42) > 0.1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$S := \text{rkfixed}(A0, 0, 20, 500, D)$$

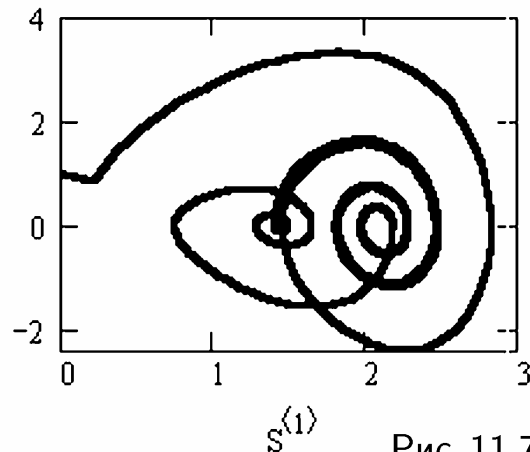


Рис. 11.7

```
i := 0,1..2000  r := 0.2  A := 2  A0 := ( 0 )
                                           ( 1 )
```

```
f(t) := | 5 if sin(t*0.4) > 0.8
         | 0 otherwise
D(t,X) := [ X1
            A*X0 - (X0)^3 - r*X1 + f(t) ]
```

```
S := rkfixed(A0,0,50,500,D)
```

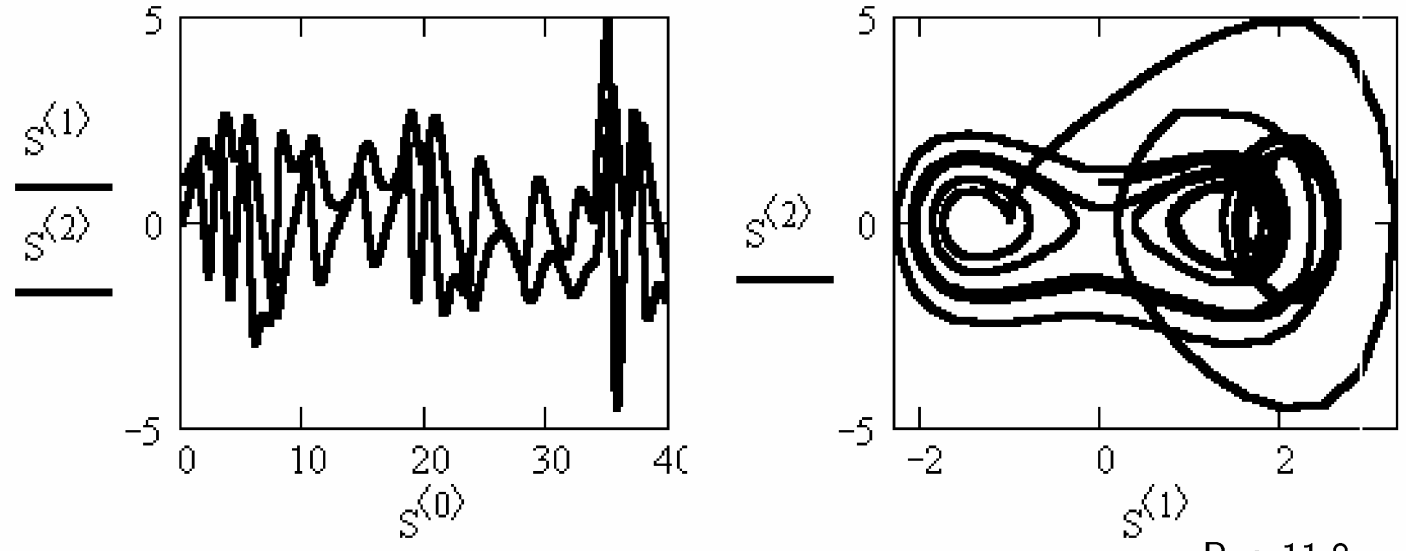


Рис. 11.8

11.5. ПРОСТЫЕ И СТРАННЫЕ АТТРАКТОРЫ. Простые аттракторы соответствуют регулярному движению системы и имеют вид устойчивых стационарных точек, предельных циклов или инвариантных торов. Если размерность фазового пространства больше 3, то могут существовать странные аттракторы, соответствующие нерегулярному движению. При этом движение не устойчиво: любые две траектории системы расходятся экспоненциально быстро, оставаясь на странном аттракторе. Так как система диссипативная, фазовый объем сжимается.

```
Given  d^2 y(t) + 0.05 * d y(t) + 1 * sin(y(t)) = 6 * cos(1.9 * t)  y'(0) = 0  y(0) = 0
        dt^2
```

```
y := odesolve(t,50,200)  t := 0,0.05..50
m := 0..500  tm := 0.1 * m  xm := y(tm)  xx := cfft(x)  am := |xxm|
```

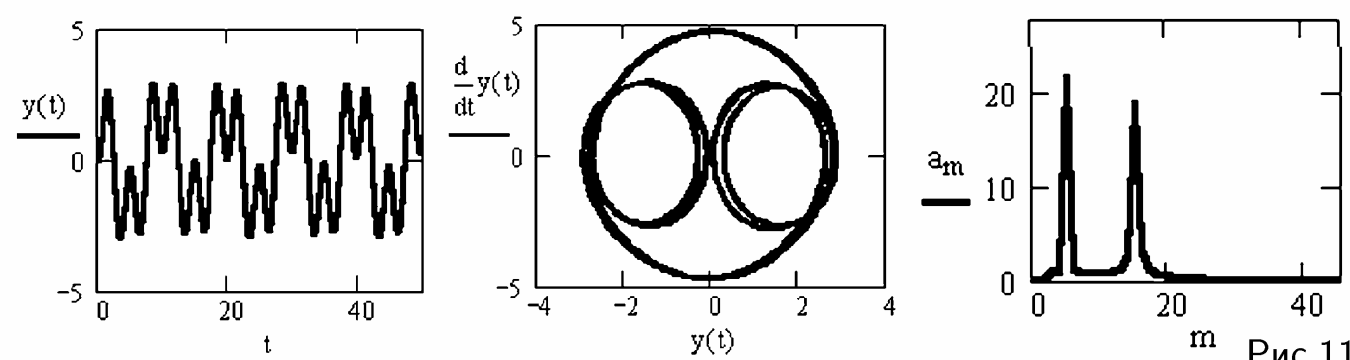


Рис.11.9

Примером простого аттрактора является предельный цикл, соответствующий колебаниям математического маятника, описывающегося уравнением $\ddot{\varphi} + 0,05\dot{\varphi} + 1 \sin(\varphi) = f_0 \cos(\omega t)$. При больших амплитудах маятник переворачивается через точку подвеса и совершает полный оборот. Можно так подобрать амплитуду вынуждающей силы, что при монотонном увеличении ее частоты, маятник будет

сначала совершать почти гармонические колебания, которые по мере приближения к резонансу будут увеличивать амплитуду и станут ангармоническими. Вблизи резонанса, маятник начнет переворачиваться через точку подвеса. При этом в спектре колебаний появляются новые гармоники (рис. 11.9).

Странный аттрактор (to attract) — притягивающее множество неустойчивых траекторий в фазовом пространстве диссипативной динамической системы, к которому стремятся хаотические траектории. Он не является кривой или поверхностью и имеет фрактальную структуру. Фактически это любой аттрактор, не являющийся положением равновесия, предельным циклом или квазипериодическим аттрактором. Основные свойства: странный аттрактор занимает ограниченную область фазовом пространстве, к нему притягиваются фазовые траектории из области притяжения.

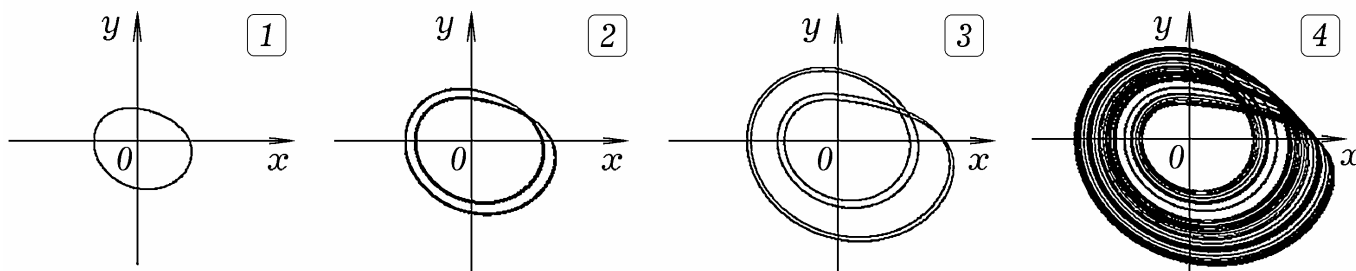


Рис.11.10

Система Реслера описывает эволюцию некоторой динамической системы (например, автоколебательного процесса или химической реакции):

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + y/5, \quad \dot{z} = 1/5 + z(x - \mu).$$

При некотором значении параметра μ в результате бифуркации Андронова-Хопфа возникает предельный цикл периодом T (рис. 11.10.1). С ростом μ происходит последовательность бифуркаций, приводящая к возникновению периодического движения с периодами $2^m T$, где $m = 1, 2, 3, \dots$ (рис. 11.10.2, 3, 4). Когда μ превышает предельное значение μ_∞ , аттрактор становится странным, спектр колебаний величин x, y, z сплошным (рис. 11.11), наступает динамический хаос.

Рассмотрим модель движения конвекционных потоков, предложенных метеорологом Э.Лоренцем, послужившую началом развития нового научного направления: хаос в детерминированных системах. Конвекционные потоки в атмосфере описываются системой дифференциальных уравнений Лоренца

$$\dot{x} = a(-x + y), \quad \dot{y} = bx - y - xz, \quad \dot{z} = -cz + xy.$$

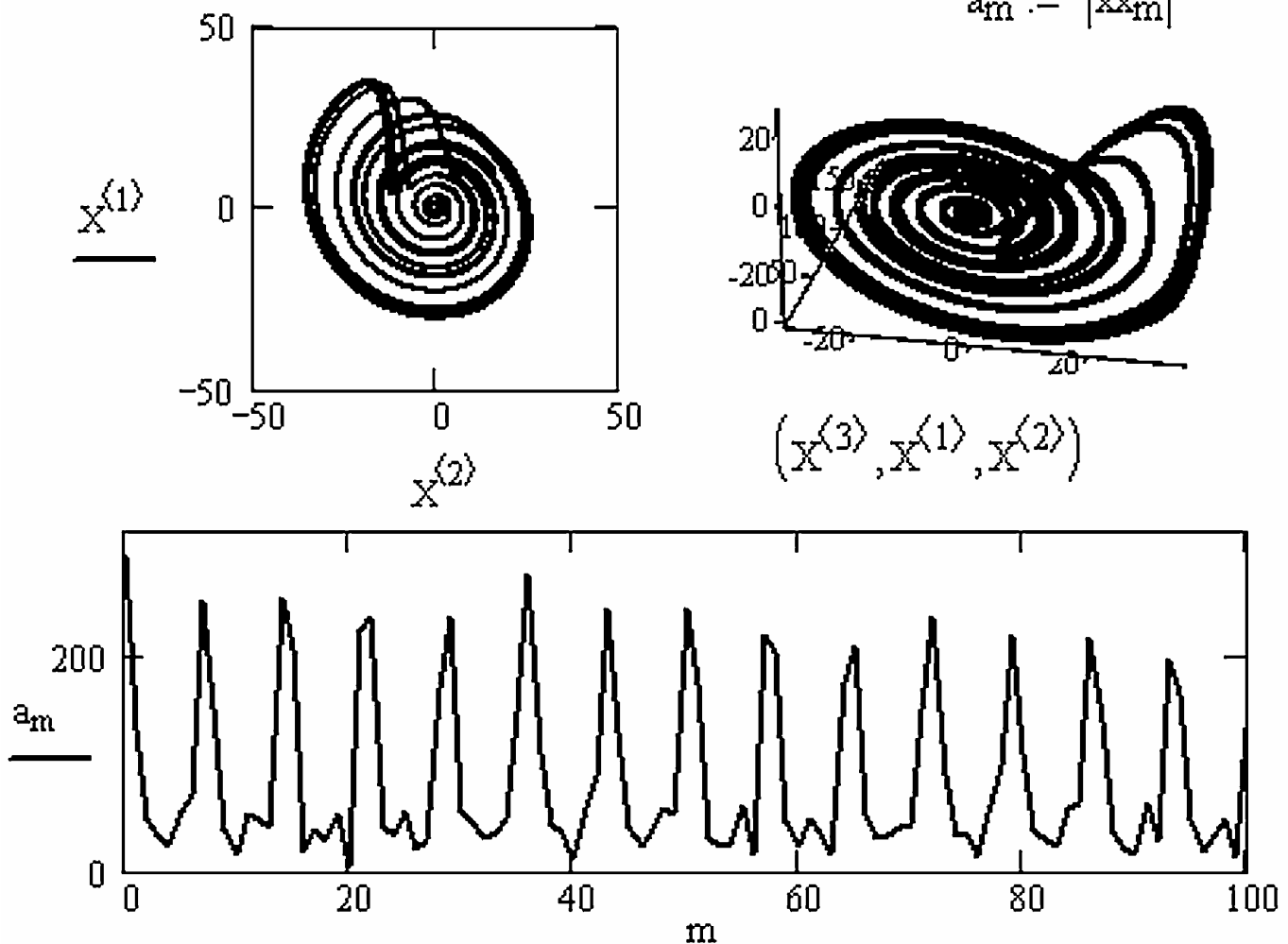
Система эволюционирует так, что фазовая кривая описывает закрученную восьмерку, захватывая две большие области фазового пространства (рис. 11.12), и называется *странным аттрактором Лоренца*. В той части фазового пространства, где фазовые кривые проходят рядом друг с другом движение системы неустойчиво: малые изменения ее состояния приводят к тому, что она эволюционирует совершенно по другому пути. Эта чувствительность к начальным условиям и называется эффектом бабочки: взмахнув крыльями в Австралии сегодня, бабочка, при определенных метеорологических условиях может изменить погоду в большом районе, например вызвать торнадо в Америке завтра.

В системах подобных системам Реслера и Лоренца возникают стохастические автоколебания, поддерживающиеся в диссипативной системе за счет энергии внешнего источника. Они характерны для систем размерность фазового пространства которых не меньше двух.

$$m := 20 \quad x := \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \\ -0.3 \end{pmatrix} \quad F(t, x) := \begin{bmatrix} -x_1 - x_2 \\ x_0 + \frac{x_1}{5} \\ 0.2 + x_2 \cdot (x_0 - m) \end{bmatrix} \quad \text{Рис.11.11}$$

$$X := \text{rkfixed}(x, 0, 100, 25000, F) \quad m := 0..25000 \quad xx := \text{cfft}(X^{(3)})$$

$$a_m := |xx_m|$$



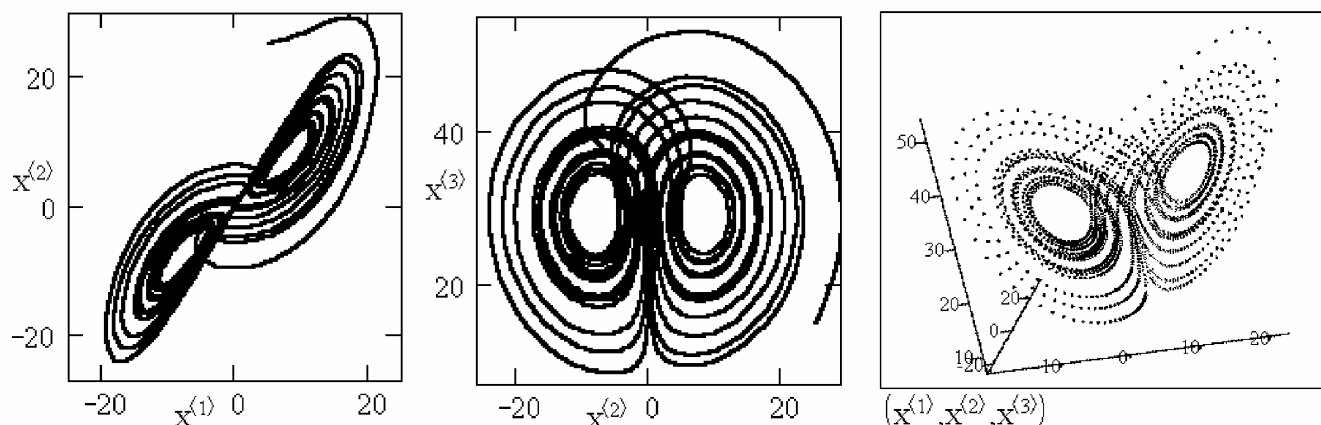
11.6. ЭРГОДИЧНОСТЬ И ПЕРЕМЕШИВАЕМОСТЬ. Рассмотрим механическую систему, находящуюся в поле консервативных сил. Такие системы называются интегрируемыми, так как их движение может быть рассчитано путем интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений. В соответствии с теоремой Лиувилля, фазовый объем, занимаемый консервативной системой, остается постоянным. Поэтому в фазовом пространстве консервативной системы нет притягивающих точек и предельных циклов (аттракторов). Несмотря на это, подобные системы также могут двигаться хаотическим образом. Примерами таких систем являются два осциллятора, взаимодействующие по нелинейному закону, или астероид, вращающийся вокруг Солнца, на который действует поле притяжения Юпитера, при определенном отношении их периодов. Определим необходимые и достаточные условия перехода к хаосу.

Так как каждый обобщенный импульс интегрируемой системы остается постоянным, то число инвариантов (сохраняющихся величин) равно количеству степеней

свободы. *Эргодическими* называются системы, у которых сохраняется единственная величина — энергия. В фазовом пространстве имеется поверхность $E = const$, по которой и перемещается точка, соответствующая состоянию системы. Как того требует теорема Лиувилля, объем фазового пространства, отвечающий ансамблю систем, остается постоянным. Примером является квазипериодическое движение гамильтоновой системы, состоящей из двух гармонических невзаимодействующих осцилляторов, имеющих иррациональное соотношение частот (фазовая кривая покрывает весь тор). Эргодичность — необходимое, но не достаточное условие хаотичности движения. При эргодическом движении время, проведенное фазовой траекторией внутри выбранной области фазового пространства, пропорционально объему этой области и не зависит от выбора начальных условий. При этом фазовая кривая равномерно и плотно заполняет некоторый объем фазового пространства.

$$\begin{pmatrix} s \\ r \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 2.2 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix} \quad F(t, x) := \begin{pmatrix} -s \cdot x_0 + s \cdot x_1 \\ r \cdot x_0 - x_0 - x_0 \cdot x_2 \\ x_0 \cdot x_1 - b \cdot x_2 \end{pmatrix} \quad \text{Рис.11.12}$$

$X := \text{rkfixed}(x, 0, 20, 2000, F)$



Необходимым условием хаотичности является *перемешиваемость* — настолько сильное изменение формы ячейки фазового пространства, соответствующего движению ансамбля систем, что эта ячейка как бы однородно перемешивается во всем фазовом пространстве. Она превращается в тонкую паутинку, нити которой пронизывают все фазовое пространство, сохраняя при этом свой объем. На рис. 11.15 показано перемешивание фазового объема в случае колебаний маятника Даффинга, получающееся в результате расчета на ЭВМ.

Рассмотрим две области фазового пространства A и B (рис. 11.13.3). Пусть в процессе движения системы область A эволюционирует в соответствии с отображением $A_t = F^t A_{t-1}$. Если динамической системе присуща перемешиваемость, то объем A превращается в тонкую паутинку, которая равномерно и однородно заполняет весь допустимый объем фазового пространства, попадая в том числе и в область B . При этом будет выполняться условие $\lim(\mu[A_t \cup B] / \mu[B]) = \mu[A_0] / \mu[D]$, где $\mu[A_0]$ — мера объема. Величина $\mu[A_0] / \mu[D]$ показывает какую часть область A занимает в области D фазового пространства. Отношение $\mu[A_t \cup B] / \mu[B]$ равно части занимаемой в области B кусочками области A_t . При равномерном перемешивании независимо от объема, формы и расположения области B относительная доля объема в ней области A остается постоянной. Таким образом, в результате

хаотического движения область A_0 превращается в тонкую паутинку, фрагменты которой могут быть найдены внутри любого объема фазового пространства. Суммарный объем паутинки остается неизменным и равным объему A_0 .

Перемешивание является необходимым и достаточным условием хаотичности движения. Наблюдаемое при этом разбегание фазовых траекторий приводит к непредсказуемости поведения исследуемой системы. Пусть в момент t_0 были известны координата x и импульс p с погрешностью Δx и Δp . Если через элемент фазового пространства $[x, x + \Delta x, p, p + \Delta p]$ проходит несколько траекторий, которые в последующие моменты времени разбегаются, взаимно удаляясь друг от друга, то предсказать состояние системы становится невозможно. Отсюда следует невозможность точного предсказания будущего. Строго говоря, будущее может быть предсказано лишь до следующей точки бифуркации, пока система ведет себя устойчиво. Даже для систем состоящих из нескольких частиц это весьма непродолжительный промежуток времени. В сложных системах одна бифуркация сменяет другую бифуркацию и так далее, что приводит к увеличению погрешности в предсказании будущего.

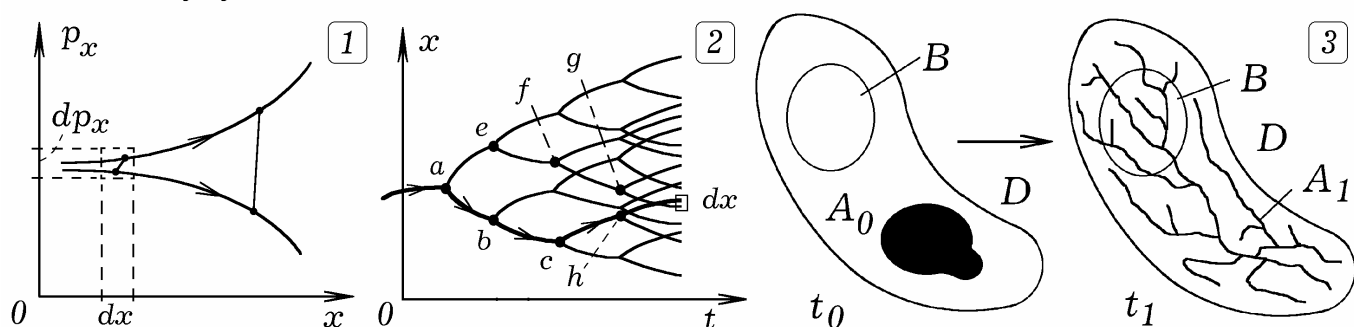


Рис. 11.13

Хаотическому движению также присуща необратимость: невозможно потребовать, чтобы объем A_t , получившийся в результате перемешивания, вернулся в свое начальное состояние A_0 . Отсюда следует невозможность точного восстановления прошлого. Допустим, в результате измерений, установлено, что в течение промежутка времени $[t, t + \Delta t]$ система находилась в интервале $[x, x + \Delta x]$ (рис. 11.13.2). Но в это состояние частица могла попасть различными способами: по пути $a - e - f - g$ или $a - b - c - h$. То есть, даже зная возможные траектории развития, нельзя определенно сказать, по какому именно пути эволюционировала система. На практике же ситуация еще сложнее, так как неизвестно расположение точек бифуркации и возможные пути развития системы. То есть при хаотическом движении информация о прошлом частично стирается.

Итак, консервативные системы движутся хаотично, если им присуще перемешиваемость. Она приводит к эргодичности движения систем, но существуют эргодичные системы, не являющиеся системами с перемешиванием.

11.7. САМООРГАНИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ. Даже сравнительно простые физические, химические, биологические системы при определенных условиях ведут себя сложным образом и проявляют способность к упорядочиванию и самоорганизации. *Самоорганизация* — это самопроизвольное установление в неравновесных диссипативных средах устойчивых регулярных структур, приводящее к уменьшению энтропии. Она возможна в открытых системах, которые обмениваются с окружающей средой веществом, энергией, импульсом. *Синергетика* — научное направление связанное с изучением закономерностей упорядочивания в разнообразных системах, возникновения упорядоченных пространственно-временных структур. Примеры самоорганизации: ячейки Бенара, вихри Тейлора (рис. 11.14),

образование планет и звезд из газо-пылевого облака, возникновение жизни.

Рассмотрим слой жидкости, находящийся в однородном гравитационном поле, и подогреваемый снизу. При небольшом градиенте температур конвекции не наблюдается, теплообмен осуществляется за счет теплопроводности. Начиная с некоторого критического значения $grad T$ возникает ячеистая конвекция: возникают так называемые ячейки Бенара (рис. 11.14.2). В центральной части образовавшихся ячеек жидкость поднимается вверх, охлаждается, затем вблизи их краев опускается вниз.

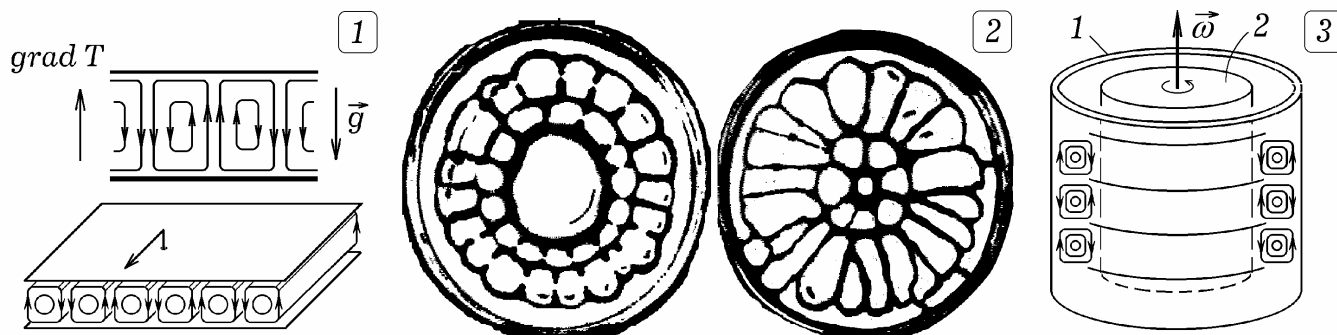


Рис. 11.14

Вихри Тейлора — вихревые потоки жидкости, образующиеся в промежутке между двумя поверхностями, движущимися относительно друг друга. Рассмотрим вертикальный полый цилиндрический сосуд 1, в который соосно вставлен подвижный цилиндр 2 меньшего радиуса (рис. 11.14.3). Пространство между цилиндрами наполняют вязкой жидкостью, подвижный цилиндр приводят во вращение. При малых скоростях жидкость увлекается вращающимся цилиндром за счет вязкости. При скоростях выше некоторого критического значения это состояние становится неустойчивым и вращающий момент передается кольцевым конвективным вихрям. Они образуют торы, которые охватывают подвижный цилиндр. Жидкость в соседних торах движется в противоположных направлениях. Образование упорядоченных структур называется самоорганизацией. При дальнейшем увеличении скорости вращения возникают многопериодические вихри, наступает хаос.

Задача 11.1. Изучите движение шарика в бильярде Синная прямоугольной формы, имеющем наклонные стенки и конус в центре.

Для расчета движения шарика используется программа ПР-11.1 (Приложение). Предполагается, что при приближении к центру бильярда $O(x_0, y_0)$ на шарик действует постоянная по модулю сила, направленная от центра. Ее проекции равны: $F_x = F \cos \alpha = F(x_0 - x)/l$, $F_y = F \sin \alpha = F(y_0 - y)/l$. При приближении к горизонтальной или вертикальной стенки на шарик действует постоянная сила, направленная соответственно вертикально или горизонтально. Программа строит траекторию и фазовую кривую, например, в осях x и p_x (рис. 11.1.2).

Задача 11.2. Логистическое отображение задается рекурсивной процедурой: $x_{i+1} = ax_i(1 - x_i)$. Изменяя бифуркационный параметр a , исследуйте процесс перехода в хаотический режим. Как ведет себя показатель устойчивости Ляпунова?

Результат работы программы ПР-11.2 (Приложение) приведен на рис. 11.2.2.

Задача 11.3. Промоделируйте колебания маятника в потенциальной яме, у которой на месте одного постепенно появляется два углубления, разделенные плавно увеличивающимся потенциальным барьером. Изучите бифуркацию типа "вил".

Программа содержит цикл, в котором случайным образом задается фаза вынуждающей силы, плавно изменяется профиль потенциальной ямы, определяемый

бифуркационным параметром b и рассчитывается положение шарика в последующие моменты времени (программа ПР-11.3, Приложение). При малых b яма имеет одно углубление, шарик колеблется относительно одного положения равновесия. С ростом b появляются два положения равновесия (рис. 11.2.3).

Задача 11.4. Промоделируйте перемешивание фазового объема в случае свободных незатухающих колебаний маятника Дафинга.

Задача решается аналогично задаче 11.3. Представим себе совокупность одинаковых маятников Дафинга, совершающих свободные незатухающие колебания, описываемые уравнением $m\ddot{x} + (x^3 - x) = 0$, отличающиеся только начальными условиями x_0, p_0 . Пусть в момент $t = 0$ фазовые точки, характеризующие начальное состояние маятников находятся внутри прямоугольника $[x, x + \Delta x, p_x, p_x + \Delta x]$. Программа ПР-11.4 (Приложение) рассчитывает состояние каждого маятника в моменты времени t_1, t_2, \dots , и ставит соответствующую точку на фазовой плоскости. Результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 11.15. Видно, что происходит расплывание фазового объема, его перемешивание в фазовом пространстве, что свидетельствует о хаотичности колебаний.

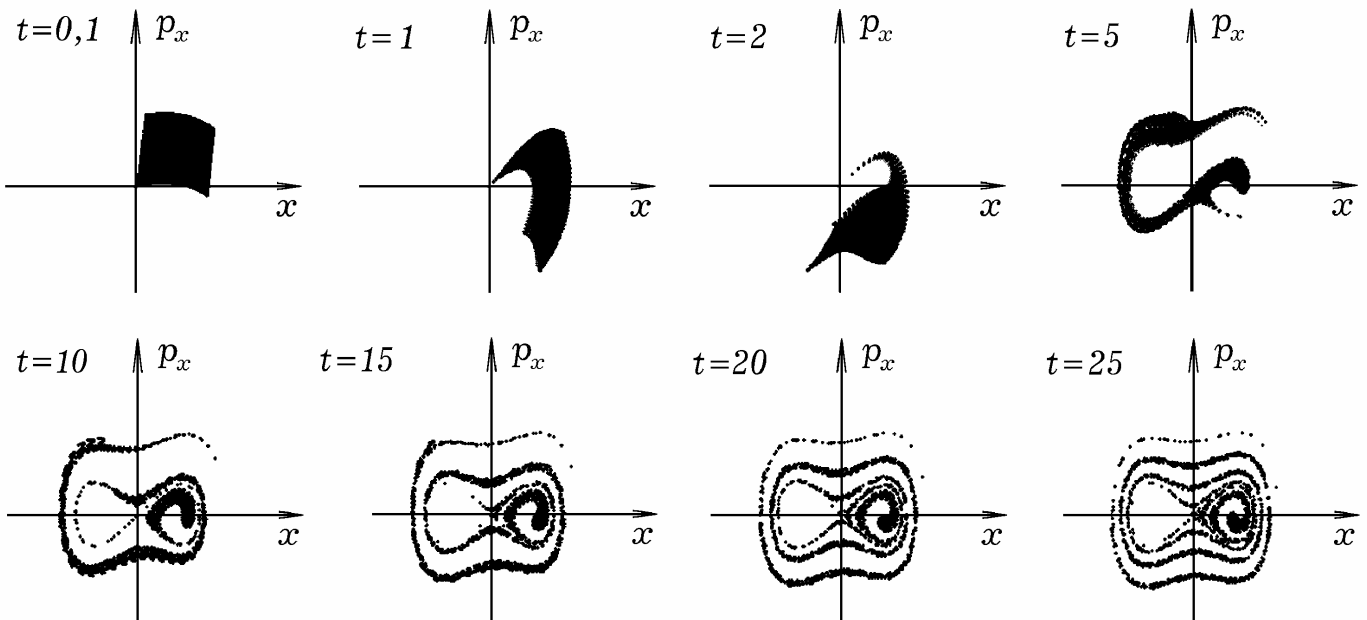


Рис. 11.15

Задача 11.5. Получите сечения Пуанкаре для маятника Дафинга.

Задача решается аналогично предыдущей (программа ПР-11.5, Приложение). Результаты расчетов представлены на рис. 11.6.

Задача 11.6. Исследуйте странный аттрактор Реслера, задаваемый системой уравнений: $\dot{x} = -(y + z)$, $\dot{y} = x + y/5$, $\dot{z} = 1/5 + z(x - \mu)$.

Программа ПР-11.6 (Приложение), решающая записанную выше систему дифференциальных уравнений состоит из цикла по времени, в котором рассчитываются значения x, y, z в следующий момент $t + \Delta t$: $\Delta x = -(y + z)\Delta t$, $\Delta y = (x + y/5)\Delta t$, $\Delta z := (0, 2 + z(x - m))\Delta t$, $x^{t+1} = x^t + \Delta x$, $y^{t+1} = y^t + \Delta y$, $z^{t+1} = z^t + \Delta z$. Результаты представлены в графическом виде в системе координат x, y на рис. 11.10.

Задача 11.7. Промоделируйте странный аттрактор Лоренца, уравнения которого имеют вид: $\dot{x} = a(-x + y)$, $\dot{y} = bx - y - xz$, $\dot{z} = -cz + xy$.

Решение задачи — в программе ПР-11.7 (Приложение). Конечностно-разностные уравнения выглядят так: $\Delta x = a(-x + y)\Delta t$, $\Delta y = (bx - y - xz)\Delta t$, $\Delta z = (-cz + xy)\Delta t$, $x^{t+1} = x^t + \Delta x$, $y^{t+1} = y^t + \Delta y$, $z^{t+1} = z^t + \Delta z$, $v_x = \Delta x/\Delta t$, $v_y = \Delta y/\Delta t$, $v_z = \Delta z/\Delta t$. Получаются такие же фазовые кривые, как на рис. 11.12.


```

===== Программа ПП -- 11.4.
uses crt, graph;
Const m= 1; k = 4; dt = 0.002; pi = 3.1415926;
var i,j, Gd, Gm: integer;
v,a,f,zz,zzz,t, x,y,z,dx,dy,dz,vx,vy,vz: real;
BEGIN Gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
if GraphResult <> grOk then Halt(1);
line(200,0,200,480); line(0,280,640,280);
For i:=1 to 40 do For j:=1 to 40 do begin
x:=0.04*i; v:=0.04*j; t:=0;
Repeat t:=t+dt; a:=(x*x*x-x)/m; v:=v+a*dt; x:=x+v*dt;
until t>2; circle(round(50*x)+200,280-round(50*v),1);
end; Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

'PASCAL

```

===== Программа ПП -- 11.5.
uses crt, graph;
const m = 1; k = 4; r = 0.5; w = 2.3;
dt = 0.002; pi = 3.1415926;
var Gd, Gm: integer; f,t,x,v,a,z,zz: real;
BEGIN x:= 0; v:= 0;
Gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
if GraphResult <> grOk then Halt(1);
line(200,0,200,480); line(0,280,640,280);
Repeat t:= t + dt; f:=1*sin(w*t);
a:=(f-k*(x*x*x-x)-r*v)/m; v:=v+a*dt; x:=x+v*dt; z:=SIN(w*t+3*pi/4);
IF (z>0)and(zz < 0) THEN circle(round(100*x) + 200, 280 - round(100*v),1);
zz:= z; until (t>10000);
Repeat until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

'PASCAL

```

===== Программа ПП -- 11.6.
uses crt, Graph;
Const a=15; b=30; c=2.2; dt=0.001; m=4.9;
var Gd,Gm: integer; t,x,y,z,dx,dy,dz,vx,vy,vz: real;
BEGIN Gd := Detect; InitGraph(Gd, Gm, 'c:\bp\bgi');
if GraphResult <> grOk then Halt(1); x:=2; y:=2; z:=1;
line(300,0,300,480); line(0,220,640,220);
Repeat t:=t+dt; dx:=- (y+z)*dt; x:=x+dx; vx:=dx/dt;
dy:=(x+y/5)*dt; y:=y+dy; vy:=dy/dt;
dz:=(0.2+z*(x-m))*dt; z:=z+dz; vz:=dz/dt;
if t>20 then putpixel(300+round(14*x),220-round(13*y),15);
until KeyPressed;
CloseGraph;
END.

```

'PASCAL

```

===== Программа ПП -- 11.7.
uses crt, graph;
const a=15; b=30; c=2.2; dt=0.0001;
var Gd, Gm: integer;
zz,zzz,t, x,y,z,dx,dy,dz,vx,vy,vz: real;
BEGIN Gd:=Detect; InitGraph(Gd,Gm,'c:\bp\bgi');
if GraphResult <> grOk then Halt(1);
x:=20; y:=20; z:=5;
Repeat t:=t+dt; dx:=a*(-x+y)*dt; x:=x+dx; vx:=dx/dt;
dy:=(b*x-y-x*z)*dt; y:=y+dy; vy:=dy/dt;
dz:=(-c*z+x*y)*dt; z:=z+dz; vz:=dz/dt;
putpixel(220+round(10*x),220-round(1*vz),15);
{ putpixel(220+round(10*y),220-round(1*vy),15);}
{ putpixel(100+round(10*z),220-round(1*vz),15);}
until KeyPressed; CloseGraph;
END.

```

'PASCAL